Année académique 2023-2024

Exercices de mathématiques : MATH2007

Exercices récapitulatifs

Les exercices précédés de (*) ne doivent pas être réalisés par les étudiants dispensés.

Version 1er décembre 2023

Exercices divers

1. (*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [2\pi, 3\pi]$)
   (a) $2x(x-1) = |x-1|$
   (b) $\dfrac{|2-x|}{x^2-4} \geq x-2$
   (c) $\sin(2x)\cos(x) = \sin(x)$
   (d) $\cos(2x) = \cos(x)$

2. (*) Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(1,-1,3)$, $B(-1,2,1)$ et $C(3,2,-1)$. Calculer
   (a) $2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$
   (b) les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$
   (c) les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AC}$.

3. (*) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.
   (a) $x^2 + 3 = 2ix$
   (b) $8 - x^3 = 0$

4. (*) Dans un repère orthonormé, construire la courbe dont une équation cartésienne est
   1) $4x^2 + 9y^2 = 36$
   2) $3x^2 - 2y = 1$
   3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
   4) $16y^2 - 9x^2 = 144$

   Pour chacune des coniques, déterminer
   (a) les coordonnées du centre et le rayon pour les cercles éventuels
   (b) les coordonnées du (des) foyer(s), du (des) sommet(s) pour les éventuelles ellipses, hyperboles et paraboles
   (c) une équation des asymptotes pour les éventuelles hyperboles

5. Si c'est possible, simplifier au maximum les expressions suivantes :
   (a) $\sin(\ln(e^{-\pi/6})) + \cos(\mathrm{tg}(-\pi/3))$
   (b) $\arccos(1 - \sin(5\pi/6)) + \arcsin(\sin(7\pi/6))$

6. Si elles existent, déterminer les limites suivantes
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{|1-x|}{\sqrt{1+x^2}}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\exp(2x)-1}{x}$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$

7. Où la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-4x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.

8. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|2x| \geq y \text{ et } y^2 \leq 5 + x\}.$$
   Donner aussi une représentation graphique de l'ensemble.

9. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.
   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(4x)}{x}\, dx$
   (b) $\int_{-\infty}^0 x\, e^{2x}\, dx$
   (c) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{2+x}\, dx$
   (d) $\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx$
   (e) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2}{x(x^2-4x+4)}\, dx$

10. Résoudre l'équation suivante en spécifiant dans quel intervalle on travaille
$$D^2 f(x) + f(x) = x + \sin(x)$$

(*) Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par
   (a) $(v/10)^2 + v/2$ si cette voiture est équipée de freins normaux
   (b) v si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.
2. Un homme se promenant sur une route vit venir à lui d'autres hommes et il leur dit "J'aurais aimé que vous soyez deux fois autant que vous êtes, plus la moitié de la moitié de ce double, plus la moitié de ce dernier nombre. Ainsi avec moi vous seriez 100."
   Qu'il dise celui qui le peut, combien étaient les hommes qu'il a vu venir à lui. (Alcuin, 8 ème siècle)
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?

QCM

1. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, le graphique de $F(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}$ est
   (a) le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice
   (b) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X
   (c) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
   (d) le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine
   (e) aucune réponse correcte
2. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx+p$, $(m, p \in \mathbb{R})$
   (a) vrai (b) faux
3. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
   (a) vrai (b) faux
4. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
   (a) vrai (b) faux
5. Le domaine de la fonction donnée par $\cos(\cos(x))$ est l'intervalle [-1,1]
   (a) vrai (b) faux
6. Le cosinus du carré d'un nombre réel
   (a) est égal au carré du cosinus du réel
   (b) est égal au double du cosinus du réel
   (c) est égal au double du produit du sinus et du cosinus du réel
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte